12-7-17

Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Buenos Aires Examen Final de Probabilidad y Estadística - 12 de julio de 2017

Apellido y Nombre .... Legajo ....

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Teórico 1	Teórico 2	Nota

La condición mínima de aprobación es de tres puntos correctos. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Ejercicio 1 *Una empresa tiene dos máquinas que fabrican clavos. La longitud de los clavos que fabrica la primera se distribuye uniformemente en el intervalo [3mm, 6mm] y la segunda produce clavos cuyas longitudes se distribuyen según la siguiente función de densidad: Un clavo se considera defectuoso si su longitud es inferior a 3.5mm o superior a 5.5mm.*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x-3) & si \quad x \in (3,5) \\ \frac{2}{3}(6-x) & si \quad x \in (5;6) \end{cases}$$

a. *Hallar la probabilidad de que un clavo elegido al azar de esta producción resulte defectuoso sabiendo que la primer maquina produce el triple de clavos que la segunda.*

b. *Si un clavo elegido al azar de esta producción resulta de buena calidad hallar la probabilidad de que haya sido producido por la segunda máquina.*

c. *Si se eligen 8 clavos de esta producción, hallar la probabilidad de que a lo sumo dos resulten defectuosos.*

Ejercicio 2 *El valor histórico del precio medio diario del activo AA es de $2.3 y su dispersión $2.25. En una muestra aleatoria de 25 observaciones sobre los precios del activo diario, se halló un promedio de $2.98. Suponiendo que las variables tienen distribución normal, interesa saber si ha cambiado el valor medio histórico.*

a. *Plantee las hipótesis a testear y proponga un test de nivel 5% adecuado para este problema. Indique claramente la zona de rechazo.*

b. *¿Qué decisión tomaría?*

Ejercicio 3 *En pruebas diseñadas para medir el efecto de cierto aditivo (en%) en el tiempo de secado (en horas) de pintura se obtuvieron los siguientes datos.*

Y Concentración del aditivo	4	4.2	4.4	4.6	4.8	5	5.2	5.4	5.6	5.8
X Tiempo de secado	8.7	8.8	8.3	8.7	8.1	8	8.1	7.7	7.5	7.2

a. *Hallar un modelo lineal para estimar el tiempo de secado en función de la concentración de aditivo.*

b. *Estimar puntualmente y por intervalo el valor esperado de tiempo de secado para una concentración de 5.5%.*

Ejercicio 4 *Una caja tiene tres monedas, una de las cuales tiene dos caras, otra tiene dos cruces y la tercera es una moneda correcta. Una moneda de la caja es seleccionada al azar, se arroja y resulta una cara. Qué probabilidad hay de que sea la moneda correcta.*

Teórico 1 *Deduzca un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para la media poblacional de una población normal, cuando se desconoce el valor de la varianza poblacional.*

Teórico 2 a. *Explicar como se relacionan las distribuciones exponencial y Poisson.*

b. *Si se sabe que $X \sim Po(\lambda = 2)$ e $Y \sim Exp(\mu = \frac{1}{3})$ son variables aleatorias independientes, hallar el valor esperado y la varianza de $W = 2X - 3Y$*

PyE - final - UTN

HOJA N°

FECHA 12-7-17

① Una empresa tiene dos máquinas que fabrican clavos. La long. de los clavos que fabrica la primera se distribuye uniformemente en el intervalo [3mm, 6mm] y la segunda produce clavos cuyas longitudes se distribuyen según la sig. función de densidad.
Un clavo se considera defectuoso si su longitud es inferior a 3,5mm o superior a 5,5mm

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{3} & \text{si } x \in (3,5) \\ \frac{2(6-x)}{3} & \text{si } x \in (5,6) \end{cases}$$

a) Hallar la prob. de que un clavo elegido al azar de esta producción resulte defectuoso sabiendo que la primera máquina produce el triple de clavos que la segunda

A: "el clavo seleccionado al azar es producido por la 1° máquina"
B: " " " " " " " " 2° máquina"

$P(A) = 3P(B)$, $P(A) + P(B) = 1 = 3P(B) + P(B) \rightarrow P(B) = \frac{1}{4}$ $P(A) = \frac{3}{4}$

X: "long., en mm, del clavo fabricado por la 1° máq" $X \sim U(3,6)$
Y: " " " " " " " 2° máq"

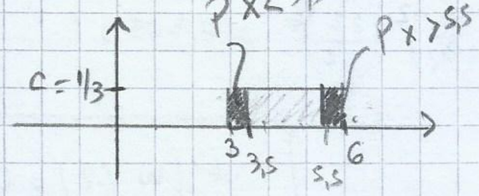
D: el clavo elegido al azar es defectuoso

$$P(D) = P(D|A)\,P(A) + P(D|A^c)\,P(A^c) = P(D|A)\,P(A) + P(D|B)\,P(B) =$$

$$= \underbrace{P(X<3,5 \cup X>5,5)}_{1/3} \underbrace{P(A)}_{\cdot 3/4} + \underbrace{P(Y<3,5 \cup Y>5,5)}_{1/8} \underbrace{P(B)}_{1/4} \overset{C.A}{=} \frac{9}{32}$$

C.A $P(X<3,5 \cup X>5,5) =$

$= (3,5-3)\cdot\frac{1}{3} + (6-5,5)\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$



$(6-3)\cdot c = 1$
$\rightarrow c = 1/3$

$$P(Y<3,5 \cup Y>5,5) = \int_3^{3,5} \frac{x-3}{3}\,dx + \int_{5,5}^{6} \frac{2}{3}(6-x)\,dx = \frac{1}{24} + \frac{1}{12} = \frac{1}{8}$$

$$\boxed{P(D) = 0,2813}$$

NOTA

b) Si un clavo elegido al azar de esta producción resulte de buena calidad hallar la prob. de que haya sido producido por la 2° máq.

$$P(B|D^c) = \frac{P(D^c|B)\,P(B)}{P(D^c|B)\,P(B) + P(D^c|B^c)\,P(B^c)} =$$

$$= \frac{(1-P(D|B))\,P(B)}{(1-P(D|B))\,P(B) + (1-P(D|A))\,P(A)} =$$

$$= \frac{(1-1/8)\,1/4}{(1-1/8)\,1/4 + (1-1/3)\,3/4} = \frac{7/32}{7/32 + 1/2} = \frac{7}{23} = 0,3043$$

$$\boxed{P(B|D^c) = 0,3043}$$

c) Si se eligen 8 clavos de esta producción hallar la prob. de que a lo sumo dos resulten defectuosos

W: "cantidad de clavos defectuosos de una muestra de 8"

$W \sim Bi\,(8, 0.2813)$ $\times$ a) $P(D) = 0.2813$

discreta

$$P(W \leq 2) = P(W=0) + P(W=1) + P(W=2) = 0,5995$$

$$P(W=0) = \binom{8}{0}\left(\frac{9}{32}\right)^0 \left(\frac{23}{32}\right)^8 = 0,0712$$

$$P(W=1) = \binom{8}{1}\left(\frac{9}{32}\right)^1 \left(\frac{23}{32}\right)^7 = 0,2229$$

$$P(W=2) = \binom{8}{2}\left(\frac{9}{32}\right)^2 \left(\frac{23}{32}\right)^6 = 0,3053$$

$$\boxed{P(W \leq 2) = 0,5995}$$

NOTA

HOJA N°

FECHA 12-7-17

PyE - final - UTN

(2) El valor histórico del precio medio diario del activo AA es de \$ 2,3 y su dispersión \$ 2,25. En una muestra aleatoria de 25 observaciones sobre los precios del activo diario, se halló un promedio de \$ 2,98. Suponiendo que las variables tienen distr. normal interesa saber si ha cambiado el valor medio histórico

a) Plantee las hipótesis a testear y proponga un test de nivel 5% adecuado para este problema. Indique claramente la zona de rechazo

$\alpha = 0.05$
$n = 25$
$\bar{X} = 2,98$
$\sigma = 2,25$

$H_0: \mu = 2,3$ vs $H_1: \mu \neq 2,3$

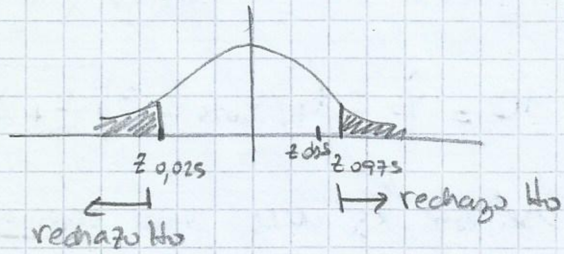
$$e_m = \frac{\bar{X} - 2,3}{2,25/\sqrt{25}} = \frac{\bar{X} - 2,3}{0,45} \sim N(0,1) \text{ bajo } H_0$$

Rechazo H_0 si $|Z_{obs}| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$Z_{obs} = \frac{2.98 - 2.3}{0.45} = 1,5111$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,975} = 1,96$$

$Z_{obs} < Z_{0,975}$ $\therefore$ $\boxed{\text{No rechazo } H_0}$



b) ¿Qué decisión tomaría?

No hay evidencia para asegurar que el promedio ha variado

NOTA

③ En pruebas diseñadas para medir el efecto de cierto aditivo (en %) en el tiempo de secado (en horas) de pintura se obtuvieron los sig. datos:

Concentración del aditivo	4	4,2	4,4	4,6	4,8	5	5,2	5,4	5,6	5,8
tiempo de secado	8,7	8,8	8,3	8,7	8,1	8	8,1	7,7	7,5	7,2

a) Hallar un modelo lineal para estimar el tiempo de secado en función de la concentración de aditivo

$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \xrightarrow{\text{estimo}} \hat{Y} = b_0 + b_1 x \longrightarrow \boxed{\hat{Y}_{(x)} = 12{,}19 - 0{,}833x}$

b) Estimar puntualmente y por intervalo el valor esperado de tiempo de secado para una concentración de 5,5%

Puntualmente

$X_0 = 5{,}5 \rightarrow \hat{Y}_{(x_0)} = Y_{(5,5)} = 12{,}19 - 0{,}833 \cdot 5{,}5 = 7{,}61 \rightarrow \boxed{\hat{Y}_{(5,5)} = 7{,}61}$

No especifican α para el intervalo, tomo $\alpha = 0{,}05$, $n = 10$

$\bar{X} = 4{,}9$

$t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} = t_{8,0{,}025} = 2{,}306$,

$S^2 = \frac{1}{n-2} \cdot \left(S_{YY} - \frac{S_{XY}^2}{S_{XX}}\right) = \frac{1}{8} \cdot \left(2{,}589 - \frac{(7{,}5625)}{3{,}3}\right) = 0{,}0371 \rightarrow S = 0{,}1928$

$IC = \hat{Y}_0 \pm t_{8,0.025} \cdot S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{S_{XX}}} \Rightarrow \boxed{IC = [7{,}41 \ ; \ 7{,}81]}$

Usé este xq dice "valor esperado" → lo relacioné con la media

NOTA

PyE - UTN - Final

HOJA N°

FECHA 12-7-17

(4) Una caja tiene 3 monedas una de las cuales tiene dos caras, otra tiene dos cruces y la tercera es una moneda correcta. Una moneda de la caja es seleccionada al azar, se arroja y resulta una cara. ¿Qué prob. hay de que sea la moneda correcta?

A: "la moneda seleccionada es la que tiene 2 caras" $P(A) = 1/3$

B: " " " " " " " " 2 cruces" $P(B) = 1/3$

C: " " " " es la correcta" $P(C) = 1/3$

D: "al arrojar una moneda salió cara"

D^c: " " " " " " cruz"

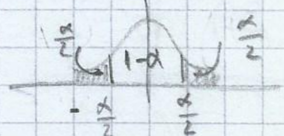
$P(D|A) = 1$ $\quad P(D|B) = 0$ $\quad P(D|C) = 1/2$

$$P(C|D) = \frac{P(D|C) \cdot P(C)}{P(D|C)\,P(C) + P(D|B)\,P(B) + P(D|A)\,P(A)} = \frac{1/2 \cdot 1/3}{1/2 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3} =$$

$$= \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} \qquad \boxed{P(C|D) = 1/3}$$

A1 Deduzca un intervalo de confianza de nivel $1-\alpha$ para la media poblacional de una población normal cuando se desconoce la varianza pobl.

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$



t

$$1-\alpha = P\left(-t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(-t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}-\mu \leq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= P\left(t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \geq \mu - \bar{X} \geq -t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= P\left(t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} + \bar{X} \geq \mu \geq \bar{X} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

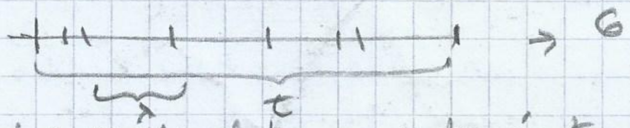
$$\rightarrow \boxed{IC_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{X} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \,,\, \bar{X} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]}$$

NOTA

T2 a) Explicar cómo se relacionan las distribuciones exponencial y Poisson

$X \sim Po(\lambda t)$ defino la r.a. Y que mide la tasa de ocurrencia

Poisson : cant. de éxitos en el tiempo t



exponencial: mide el tiempo entre éxitos o hasta la ocurrencia de un suceso

$Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$

b) Si se sabe que $X \sim Po\ (\lambda = 2)$ e $Y \sim Exp\ (\lambda = 1/3)$ son r.a. independientes, hallar el valor esperado y la varianza de $W = 2X + 3Y$

$E(X) = 2$ $\quad\quad E(Y) = 3$

$V(X) = 2$ $\quad\quad V(Y) = 9$

$E(W) = E(2X+3Y) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 2 + 3 \times 3 = 13$

$$\boxed{E(W) = 13}$$

$V(X) = V(2X+3Y) = 4V(X) + 9V(Y) = 4 \times 2 + 9 \times 9 = 89$

$$\boxed{V(W) = 89}$$